

$$1. \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A \oplus B = A \cup B - A \cap B$$

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

$$2. A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

3. 若对每个 $x \in A$ 都有 xRx , 则称 R 是自反的

若对每个 $x \in A$ 都有 $x\bar{R}x$, 则称 R 是反自反的

对任意 $x, y \in A$, 若 xRy , 则 yRx , 就称 R 是对称的 (有 $\langle x, y \rangle$ 就有 $\langle y, x \rangle$ 的)

若对任意 $x, y \in A$, 由 xRy 且 yRx , 可得出 $x=y$, 则称 R 是反对称的? (有一个就是非对称的)

对任意 $x, y \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $x \neq y$, 则 $\langle y, x \rangle \notin R$, 就称 R 是反对称的 (只要条件不成立就是反对称的)

对任意 $x, y, z \in A$, 若 xRy 且 yRz , 则 xRz , 就称 R 是传递的

4. $\neg P$ 否定

$\wedge$ 一假则假

$\rightarrow$ “如果...就” $P=1, Q=0$ 时为假命题

5. 关系图, 由前面的指向后面的.

6. 在复合关系中, R 的后域是 S 的前域或 B

7. 上界: 向上相连的所有

上确界: 上界最小的

最大元: 上一层唯一的

极大元: 上一层的

8. 划分: 划分的各子集无公共元素 (两两互不相交的非空子集)

9. $P(A)$ 为集合 A 的幂集 $P(A)$ 是 A 所有子集组成的集合

$$|P(A)| = 2^n \quad |A| = n \quad A \text{ 上的二元关系有 } 2^n$$

10. $\Rightarrow$ 和 $\Leftrightarrow$ 的区别

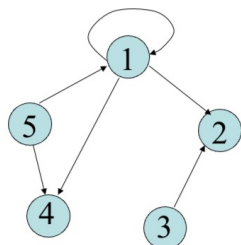
代数运算的间接证明

11. $\rightarrow$, 只有在条件为真, 结论为假的时候才为假命题

12. 矩阵 $\langle i, j \rangle$ 表示 A 中的第 i 个元素和第 j 个元素的序偶 $m_{ij} \begin{cases} 1 & \langle i, j \rangle \in R \\ 0 & \langle i, j \rangle \notin R \end{cases}$

13. 关系图

• 例: 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}$,
 则, R 的关系图 G_R 如下:



$$(A \cap B) \cup (A \cap C) - (A \cap B) \cap (A \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

$$A \cap (B \oplus C) = A \cap (B \cup C - B \cap C) = A \cap [(B \cup C) \cap (\overline{B \cap C})]$$

$$= A \cap (B \cup C) \cap \overline{B \cap C} = A \cap (B \cup C) \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$$

$|A| = n$, 则定义在 A 上的二元关系有 2^{n^2} 个

14. R是自反的

$\Leftrightarrow$ 对任意的 $x \in X$, 有 xRx

$\Leftrightarrow$ 关系矩阵中主对角线全为1

$\Leftrightarrow$ R的关系图中每个顶点均有自环

R是反自反的

$\Leftrightarrow$ 若对每 $x \in X$ 都有 $x \bar{R} x$

$\Leftrightarrow$ R的关系矩阵中主对角线全为0

$\Leftrightarrow$ R的关系图中每个顶点处均没有自环

R是对称的

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) (x, y \in X, \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$

$\Leftrightarrow$ R的关系矩阵是对称矩阵

$\Leftrightarrow$ R的关系图中任两个顶点间若有边则必有两条方向相反的边

R是反对称的

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) (x, y \in X, \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$

$\Leftrightarrow$ R的关系矩阵中关于主对角线对称的任两个元素至多有一个

$\Leftrightarrow$ R的关系图中任两个顶点间至多有一个方向的边

R是传递的

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z) (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, z \rangle \in R)$

$\Leftrightarrow$ R的关系矩阵 $(r_{ij})_{n \times n}$ 中对任意的 i, j, k 有, 若 $ik=1$ 且 $r_{ij}=1$, 则 $r_{ij}=1$

$\Leftrightarrow$ R的关系图中任意一条长度为2的路径都有从其起始顶点到终止顶点的边

2.2

1. 设R是A到B的关系, S是B到C的关系, 称RS为R与S的复合关系。在复合关系中, R的后域B是S的前域B。复合的结果是RS是R的前域A到S的后域C的一个二元关系

2. $R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = I_A$

$$R^m R^n = R^{m+n} \quad (R^m)^n = R^{mn}$$

$$R^{2n} = R^2 \quad R^{2n+1} = R \quad (n \geq 1)$$

3. 集合A上的关系R是传递的, 当且仅当 $R^2 \subseteq R$ 。

4. $R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R \}$, 称为R的逆关系。(逆关系是一个集合)

5. 设R为X上的二元关系, 则 R是对称的, 当且仅当 $R = R^{-1}$

R是反对称的, 当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq R^0$

闭包: 包含该关系的最小的有此性质的关系

$$r(R) = R \cup R^0 \quad \text{自反闭包}$$

$$s(R) = R \cup R^{-1} \quad \text{对称闭包}$$

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \quad \text{传递闭包}$$

闭包

$$R \circ I_A = I_A \circ R = R$$

2.3 2.4

1. 设R是集合A上的二元关系, 若R具有自反性、对称性和传递性, 则称R是一个等价关系

例: 二元关系 $R_k (k \in \mathbb{Z})$ $R_k = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists m \in \mathbb{Z}, \text{使 } x - y = m \cdot k \}$

2. 设A为非空集合, 令 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, $S_i \in A, i = 1, 2, \dots, m$ 。

集合的划分就是把该集合分成一些两两互不相交的非空子集。

如果S满足 (1) $S_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, m$

(2) $S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, m$

(3) $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m = A$ 。

则称S为A的一个划分

设是集合 A 的一个划分, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, 令: $R = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{存在 } s_i \in S, \text{使得 } x, y \in s_i \}$. 于是, R 是 A 上的一个等价关系, 并且 $A/R = S$

序关系: 自反性, 反对称性和传递性, 则称 R 是一个偏序 (或半序, 部分序) 关系。

最大元, 最小元: 上/下-层唯一的 **最大元必为极大元**

极大元, 极小元: 上/下-层

上界, 下界: 向上/向下相连的所有

上确界, 下确界: 上确界最小的

满射: 所有 y 都被对应

单射: 一个 x 只对应一个 y

复合映射交换后不一定是映射

$$(\tau \circ \phi)(x) = \tau(\phi(x)) \quad g \circ f = g(f(x))$$

$$p \circ (\tau \circ \phi) = (p \circ \tau) \circ \phi$$

等势: 设集合 A, B , 若存在 A 到 B 的双射, 则称 A 与 B 等势, 记为 $A \sim B$ (可形象理解为 A 与 B 的元素一样多)

有限集不能和其真子集等势; 无限集能够与其等势

正实数和全体实数一样多

集合大小是可比的

不存在最大的集合

设 A 是一个集合, 若 A 与 N 等势, 则称 A 为可数无限集; 若 A 是有限集, 则称 A 为可数集

实数集是不可数的

$\wedge$ '且', '一假则假' 合取

$\vee$ '或', '一真则真' 析取

" $\rightarrow$ " 当且仅当 P 真 Q 假时为假

" $\leftrightarrow$ " 真值当且仅当 P, Q 同真同假时

运算优先级: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

G 在所有解释下均为真, 则称 G 为重言式

均为假, 则称 G 是矛盾的或矛盾式

若至少有一个解释使 G 为真, 则称 G 是可满足的或可满足式

对偶 在仅含 $\neg, \vee, \wedge$ 的命题公式 A 中, 若将所有 $\wedge$ 换成 $\vee$, 所有的 $\vee$ 换成 $\wedge$, 则称所得的命题公式为 A 的对偶, 记为 A^*

若 A 为重言式, 则 A^* 为矛盾式

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$